

9. *Kavesh Sh.* Melt spinning of metal fibers // American Institute of Chemical Engineers. Symposium Series, 1978. V. 74. № 180. P. 1-15.

10. *Butler I.G., Kurz W., Gillot J., Lux B.* The Production of Metal Fibres and Wires Directly from the Melt // Fibre Science and Technology. 1972. № 5. P. 243-262.

Tsun I.M. EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF SOLID PART OF LAMINAR CAPILLAR JET

The article considers a liquid jet, separated from the surrounding space by the interface, along which there are the forces of surface tension and the action of these forces is commensurate with the action of other forces on the jet (capillary jet); they are obtained and analyzed the experimental dependences.

Key words: laminar capilar jet; solid and drop parts of jet; stable and unstable pieces of solid part of jet; modeling by similitude method.

УДК 517.98

О РЕАЛИЗАЦИЯХ ПАРА-ЭРМИТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ

© С.В. Цыкина

Ключевые слова: группы и алгебры Ли; псевдоортогональные группы; симплектические пространства; пара-эрмитовы симметрические пространства.

Изучаются различные реализации пара-эрмитовых симметрических пространств G/H , для которых группа G есть псевдоортогональная группа $SO_0(p, q)$.

Мы рассматриваем пара-эрмитовы симметрические пространства G/H , для которых группа G есть псевдоортогональная группа $SO_0(p, q)$, а связная компонента единицы H_e подгруппы H есть $SO_0(1, 1) \times SO_0(p-1, q-1)$. Все такие пространства (с данной G) получаются факторизацией из «самого большого» пространства G/H_e . Отображение накрытия не более чем четырехкратно. Размерность всех этих пространств G/H равна $2n-4$, где $n = p+q$, сигнатура есть $(n-2, n-2)$, а ранг равен 2. Именно только для таких пространств с рангом больше единицы пока получены явные формулы в полиномиальном квантовании, см. [1], [2].

В настоящей работе мы описываем несколько реализаций наших пространств G/H , они нужны для построения гармонического анализа и полиномиального квантования на G/H .

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x, y] = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i,$$

где $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = -1$, $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 1$. Группа $G = SO_0(p, q)$ есть связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем 1, сохраняющих билинейную форму $[x, y]$. Для простоты мы будем рассматривать общий случай $p > 1$, $q > 1$. Мы считаем, что группа G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки.

Реализация (A): многообразие в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Это – общая ситуация: для всякого пара-эрмитова симметрического пространства G/H алгебра Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы H имеет центральный элемент, скажем, Z_0 , поэтому G/H с точностью до накрытия есть

многообразие в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, которое является G -орбитой этого элемента Z_0 в присоединенном представлении.

В нашем случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G = \mathrm{SO}_0(p, q)$ состоит из вещественных матриц X порядка n , удовлетворяющих условию $X'I + IX = 0$, где $I = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, штрих означает матричное транспонирование. Группа G действует в $\mathfrak{g}$ сопряжениями: $X \mapsto g^{-1}Xg$. Будем записывать матрицы n -ого порядка в блочном виде, отвечающем разбиению $n = 1 + (n-2) + 1$. Стационарная подгруппа H матрицы

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

из $\mathfrak{g}$ состоит из матриц

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & v & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $v \in \mathrm{SO}(p-1, q-1)$. Группа H состоит из двух связных кусков, связная компонента единицы H_e состоит из матриц (1), где $\alpha = \mathrm{cht}$, $\beta = \mathrm{sht}$. Следовательно, $H_e = \mathrm{SO}_0(1, 1) \times \mathrm{SO}_0(p-1, q-1)$. Наше многообразие G/H есть G -орбита в алгебре $\mathfrak{g}$, содержащая Z_0 .

Матрица $g \in G$ переводит матрицу Z_0 в матрицу $X = (X_{ij}) \in \mathfrak{g}$, образованную минорами второго порядка матрицы g , взятыми со знаком $\pm$, а именно, X_{ij} есть умноженный на $(-\lambda_i)$ минор матрицы g , расположенный в строках с номерами $1, n$ и столбцах с номерами i, j .

Реализация (В): индефинитное грассманово многообразие. Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$ однополостный гиперболоид $\mathcal{X}: [x, x] = 1$ и двуполостный гиперболоид $\mathcal{Y}: [y, y] = -1$. Первый из них – псевдориманово многообразие, второй – риманово. Обозначим через Σ многообразие пар (u, v) , $u \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, таких, что $[u, v] = 0$. Это – аналог многообразия Штифеля $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-2)$. Его размерность равна $2n-3$. Многообразие Σ можно реализовать как совокупность двустрочных матриц

$$\sigma = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

с теми же условиями для u, v . Возьмем начальные точки: $x^0 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathcal{X}$, $y^0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Y}$. Они дают начальную точку $\sigma^0 \in \Sigma$:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа G действует на Σ *умножениями справа*:

$$\sigma \mapsto \sigma g, \quad g \in G, \quad (3)$$

это действие транзитивно. Стационарной подгруппой точки σ^0 при действии (3) служит подгруппа H_2 , состоящая из матриц

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathrm{SO}_0(p-1, q-1).$$

Она является подгруппой и в H .

Назовем две матрицы σ и $\tilde{\sigma}$ из Σ эквивалентными, если одна получается из другой умножением слева на матрицу $r \in \text{SO}(1, 1)$:

$$\tilde{\sigma} = r\sigma. \quad (4)$$

Матрица r из $\text{SO}(1, 1)$ есть

$$r = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

поэтому условие (4) в терминах векторов есть

$$\tilde{u} = \alpha u + \beta v, \quad \tilde{v} = \beta u + \alpha v. \quad (5)$$

В частности, для матрицы σ^0 эквивалентными являются матрицы

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1. \quad (6)$$

Факторизуем множество Σ по указанному отношению эквивалентности, полученное множество обозначим $\Sigma/\sim$. Действие (3) группы G порождает ее действие на $\Sigma/\sim$. Элементы $h \in H$, см. (1), переводят σ^0 как раз в матрицу (6). Следовательно, H является стационарной подгруппой класса эквивалентности матрицы σ^0 . Таким образом, многообразие G/H есть $\Sigma/\sim$.

Сопоставим матрице σ из Σ ориентированную двумерную плоскость w , натянутую на векторы u, v , составляющие матрицу σ , см. (2). Ориентация есть класс эквивалентности матрицы σ . Обозначим через W полученное множество плоскостей w . Это множество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $\Sigma/\sim$. Действие (3) группы G на Σ и на $\Sigma/\sim$ порождает действие $w \mapsto wg$ группы G на W . Таким образом, $G/H = W$.

Реализация (C): многообразие в прямом произведении проективизаций конуса. Конус $\mathcal{C}$ в $\mathbb{R}^n$ задается условиями $[x, x] = 0$, $x \neq 0$. Он связан, группа G действует на нем транзитивно (напомним, что $p > 1$, $q > 1$). Пусть $\tilde{\mathcal{C}}$ обозначает многообразие образующих конуса $\mathcal{C}$. Оно состоит из прямых (с удаленным началом координат) $[x] = \mathbb{R}^* x$, где $x \in \mathcal{C}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Группа G действует на $\tilde{\mathcal{C}}$ естественным образом: $[x]g = [xg]$, $g \in G$. На прямом произведении $\tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$ группа G действует диагонально: $([x], [y]) \mapsto ([xg], [yg])$, $g \in G$.

Возьмем в конусе следующие две точки:

$$s^+ = (1, 0, \dots, 0, 1), \quad s^- = (1, 0, \dots, 0, -1).$$

Стационарной подгруппой пары $([s^-], [s^+])$ служит подгруппа H . Таким образом, пространство G/H есть G -орбита пары $([s^-], [s^+])$ в прямом произведении $\tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$. Она состоит из пар $([x], [y])$, $x, y \in \mathcal{C}$, таких, что $[x, y] \neq 0$, и является единственной открытой плотной G -орбитой.

Реализация (D): многообразие в прямом произведении конуса на себя. В соответствии с реализацией (C) рассмотрим в $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ множество пар (x, y) , для которых $[x, y] \neq 0$. Фиксируем значение билинейной формы $[x, y]$, а именно, обозначим через $\mathcal{A}$ множество пар (x, y) таких, что $[x, y] = -2$. Пара (s^-, s^+) входит в $\mathcal{A}$. Введем в $\mathcal{A}$ отношение эквивалентности: назовем эквивалентными пары (x, y) и $(tx, t^{-1}y)$, где $t \in \mathbb{R}^*$. Группа G действует на $\mathcal{A}$ линейно (справа): $(x, y) \mapsto (xg, yg)$, и, тем самым, на $\tilde{\mathcal{A}}$. Следовательно, пространство G/H можно отождествить с множеством $\tilde{\mathcal{A}}$ классов эквивалентных пар.

Установим *связь реализаций* (B) и (D). Пусть плоскость w из реализации (B) порождается парой векторов (u, v) . Рассмотрим два вектора

$$x = v - u, \quad y = v + u.$$

Из определения векторов u, v следует, что векторы x, y принадлежат конусу $\mathcal{C}$ и для них выполняется соотношение

$$[x, y] = -2,$$

так что пара (x, y) входит в $\mathcal{A}$. Таким образом, пересечение плоскости w с конусом $\mathcal{C}$ состоит из двух прямых (без начала координат), натянутых на векторы x, y . Эквивалентным матрицам σ и $\tilde{\sigma}$, см. (4) и (5), отвечают пары векторов (x, y) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ из $\mathcal{A}$ такие, что

$$\tilde{x} = (\alpha - \beta)x, \quad \tilde{y} = (\alpha + \beta)y.$$

Это означает, поскольку $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, что пары (x, y) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ эквивалентны в смысле реализации (D).

Итак, ориентированной плоскости $w \in W$ отвечает класс эквивалентности пар (x, y) из $\tilde{\mathcal{A}}$ из реализации (D). Это соответствие взаимно однозначно.

Многообразие *всех* ориентированных двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$ есть грассманово многообразие $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$. Мы видим, что наше множество W есть открытое подмногообразие в $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$, состоящее из плоскостей, *пересекающих* конус $\mathcal{C}$, причем первый вектор u лежит в области $[u, u] > 0$.

Реализация (E): многообразие в множестве матриц ранга один. Сопоставим паре (x, y) из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ матрицу

$$\omega = Iy'x = y^*x,$$

где $y^* = Iy'$. Множество таких матриц есть множество $\mathcal{M}$ матриц z ранга один, удовлетворяющих условиям:

$$zIz' = 0, \quad z'Iz = 0.$$

След $\text{tr } \omega$ матрицы ω равен $[x, y]$. Множество $\mathcal{M}$ содержит вместе с каждой матрицей ω всю образующую, проходящую через ω , то есть прямую $\mathbb{R}^* \omega$ (без начала координат). Поэтому прямое произведение $\tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$ есть множество $\tilde{\mathcal{M}}$ образующих в множестве $\mathcal{M}$. Линейное действие $(x, y) \mapsto (xg, yg)$ группы G на $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ превращается на множестве $\mathcal{M}$ в присоединенное действие:

$$\omega \mapsto g^{-1}\omega g. \quad (7)$$

Условие $[x, y] \neq 0$, выделяющее G -орбиту G/H в $\tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$, для матриц $\omega \in \mathcal{M}$ означает $\text{tr } \omega \neq 0$. Таким образом, пространство G/H есть подмножество в $\tilde{\mathcal{M}}$, выделяемое условием $\text{tr } \omega \neq 0$. Это подмножество можно отождествить с многообразием Ω матриц ω из $\mathcal{M}$, удовлетворяющих условию $\text{tr } \omega = 1$. Действие (7) сохраняет Ω . Поэтому мы можем взять многообразие Ω в качестве реализации пространства G/H .

Связь этой реализации (в виде Ω) и реализациями (C) и (D) – следующая: паре $([x], [y])$ отвечает матрица $\omega = y^*x/[x, y]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Tsykina Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations. International Workshop «Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics» Moscow. Aug. 25–30. 2007. V. 2. 63–71.
2. С. В. Цыкина Операторы Лапласа на пара-эрмитовых пространствах с псевдоортогональной группой движений. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2008. Т. 13. Вып. 6. 620–631.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана РФФИ (проект № 13-01-00952-а) и Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011

Tsykina S. V. ON REALIZATIONS OF PARA-HERMITIAN SPACES WITH A PSEUDO-ORTHOGONAL GROUP OF TRANSLATIONS

We study some realizations of para-Hermitian symmetric spaces G/H for that the group G is a pseudo-orthogonal group $SO_0(p, q)$

Keywords: Lie groups and Lie algebras; pseudo-orthogonal groups; symplectic spaces; para-Hermitian symmetric spaces.

УДК 517.929, 330.4

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

© А.Л. Чадов

Ключевые слова: непрерывно-дискретные модели; гибридные модели; доказательный вычислительный эксперимент; задачи управления.

Рассматривается непрерывно-дискретная система функционально-дифференциальных уравнений. Отличительной особенностью системы является наличие фазовых компонент как с непрерывным, так и с дискретным временем и постоянного запаздывания. Для рассматриваемой модели ставится задача управления в классе дискретных управлений с последствием и формулируются условия ее разрешимости в форме, допускающей проведение доказательного вычислительного эксперимента. Обсуждаются детали компьютерной реализации алгоритмов.

Непрерывно-дискретная модель, рассматриваемая в работе, является конкретной реализацией т. н. абстрактного функционально-дифференциального уравнения [1, 2]. Конкретный пример такой модели, возникающей в задачах экономической динамики, рассматривается в [3]. Отличительной особенностью системы является наличие фазовых компонент как с непрерывным, так и с дискретным временем [4, 5].

Зафиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \dots, t_{\mu+1}\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu < t_{\mu+1} = T$ и рассмотрим непрерывно-дискретную систему с дискретным управлением [6, 7]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \int_0^t K(t, s) \dot{x}(s) ds = A_0 x(0) + A_\tau x(t - \tau) + \sum_{j: t_j < t} F_j(t) y(t_j) + f(t), & t \in [0, T], \\ y(t_i) - \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij} y(t_j) = \sum_{j=1}^i H_{ij} v(t_j) + g(t_i), & i = 1, 2, \dots, \mu + 1; \end{cases} \quad (1)$$

с заданными начальным состоянием:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

и предысторией: $x(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in [-\tau, 0)$. Здесь F_j — $(n \times \nu)$ -матрицы, элементы которых суть суммируемые функции; A_0 , A_τ , B_{ij} и H_{ij} — постоянные $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(\nu \times \nu)$ и $(\nu \times m)$ матрицы соответственно, $H_{\mu+1, j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, \mu + 1$. Элементы $k_{ij}(t, s)$ ядра